Correction TD15, Polynômes de Tchebychev de première espèce

Kylian Prigent

15 juillet 2024

1 Introduction

Les polynômes de Tchebychev, nommés d'après le mathématicien russe Pafnouti Tchebychev, sont une classe de polynômes orthogonaux définis sur un intervalle donné. Ils ont de nombreuses applications en mathématiques, en physique et en ingénierie.

2 Définition

Les polynômes de Tchebychev de première espèce, notés $T_n(x)$, sont définis récursivement par la relation :

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad \forall n \in [2, +\infty] \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

où n est un entier positif.
Les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce, notés $U_n(x)$, sont définis par la relation :

$$U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2x, \qquad \forall n \in [2, +\infty] \quad U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x)$$

3 Propriétés

Les polynômes de Tchebychev présentent plusieurs propriétés intéressantes :

— **Premiers termes** :

$$T_2(X) = 2X^2 - 1T_3(X) = 4X^3 - 3X$$

— **Degré** : Les polynômes de Tchebychev de première espèce sont des polynômes de degré n.
Preuve : Par récurrence.

— Initialisation : elle est immédiate au vu de ce qui est écrit plus haut

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$ avec

$$\deg(T_n) = n \quad \deg(T_{n+1}) = n + 1$$

Alors on a directement

$$\deg(T_{n+1}) = n + 1$$

Et on a aussi

$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1}(X) - T_n(X)) \leq \max(\deg(2XT_{n+1}(X)), \deg(T_n(X))) = n + 2$$

— **monome dominant** : par récurrence, comme précédemment, on montre que le monome dominant des polynômes de Tchebychev de première espèce est $a_n = 2^{n-1}$.

— **degré des monomes** : les polynômes de Tchebychev de première espèce vérifient :

— T_{2p} a des monomes en X^{2k}

— T_{2p+1} a des monomes en X^{2k+1}

Preuve : Par récurrence (sur les deux prédécesseurs). On note pour tout entier naturel n

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k$$

— Initialisation : triviale
— Hérédité : soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$T_{2p+2} = T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n = \sum_{k=1}^{n+2} 2a_{n,k-1}X^k - \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}X^k$$

Comme T_{n+1} ne contient que des monomes de degré impair, XT_{n+1} ne contient que des monomes de degré pair, et T_n ne contient que des monomes de degré pair. On procède exactement pareil avec $n = 2p+1$

— **Lien avec le cosinus** : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$
Preuve : Par récurrence
— Initialisation : évidente
— Hérédité : soit n un entier naturel non nul, supposons $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$
$$= \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) - \cos((n-1)\theta = \cos((n+1)\theta))$$

— **Valeurs particulières** : pour tout entier naturel n :

$$T_n(1) = T_n(\cos(\theta))|_{\theta=0} = (\cos(n\theta))|_{\theta=0} = 1$$
$$T_n(-1) = T_n(\cos(\theta))|_{\theta=\pi} = (\cos(n\theta))|_{\theta=\pi} = (-1)^n$$

D'après le théorème de relèvement

$$\forall x \in [-1,1] \quad \exists \theta \in \mathbb{R} \quad \cos(\theta) = x$$

Donc

$$\forall x \in [-1,1] \quad -1 \leq T_n(x) \leq 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si $\cos(n\theta) = 0$.
Alors $n\theta = \frac{\pi}{2}[\pi] \quad \theta = \frac{\pi}{2n}[\pi] = \frac{\pi}{2n} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$. Prenons $\theta = \frac{\pi}{2n} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
Alors $\cos(\theta) = x = \pm\cos(\frac{\pi}{2n})$ On obtient de cette façons un découpage en $2n$ angles dans $[0, 2\pi]$. Ceci donne n valeurs de x dans $[-1,1]$ où T_n s'annule. Or ce polynôme est de degré n donc possède en tout n racines. On sait donc que toutes les racines de T_n sont dans l'intervalle $[-1,1]$.

— **extrema** : Le polynôme T_n atteint ses extrema entre ses racines, donc en $n-1$ points.

$$(T_n(\cos\theta))' = -n\sin(n\theta)$$

et

$$\sin(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow n\theta \in \pi\mathbb{Z} \Longleftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z} \Longleftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{n} \quad k \in [|1, n-1|]$$
$$\forall k \in [|1, n-1|] \quad T_n'(\cos(\frac{k\pi}{n})) = 0$$

Et

$$\forall k \in [|1, n-1|] \quad T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) = (-1)^k$$

— **Degré** : Les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce sont également des polynômes de degré n.
— **Orthogonalité** : Les polynômes de Tchebychev de première espèce sont orthogonaux par rapport à la fonction poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $[-1,1]$.
— Les racines des polynômes de Tchebychev de première espèce sont connues comme les "noeuds" de Tchebychev et sont données par $x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

4 Applications

Les polynômes de Tchebychev sont utilisés dans divers domaines, notamment :
— Approximation de fonctions : Les polynômes de Tchebychev peuvent être utilisés pour approximer des fonctions sur un intervalle donné avec une précision contrôlée.
— Analyse numérique : Les polynômes de Tchebychev sont utilisés dans des méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles, des systèmes linéaires et d'autres problèmes mathématiques.
— Traitement du signal : Les polynômes de Tchebychev sont utilisés dans